Rudolf Carnap

APROXIMACIONES SUCESIVAS *

Pasemos ahora del concepto de tiempo al otro concepto básico de la física, el de longitud, y examinémoslo más minuciosamente que antes. El lector recordará que en el Capítulo VII vimos que la longitud es una magnitud extensa, medible por medio de un esquema triple. La Regla 1 define la igualdad: un segmento marcado sobre un borde recto tiene ogual longitud que otro segmento marcado sobre otro borde recto si los puntos extremos de los dos segmentos coinciden. La Regla 2 define la aditividad , Si juntamos dos bordes en línea recta, su longitud total será la suma de sus longitudes separadas. La Regla 3 define la unidad: tomamos una vara con un borde recto, marcamos dos puntos sobre este borde y elegimos el segmento determinado por estos dos puntos como unidad de longitud.

Sobre la base de estas tres reglas podemos aplicar el procedimiento habitual para la medición. Supongamos que queremos medir la longitud de un largo borde *c*, por ejemplo el borde de una hendidura. Tenemos una vara de medir sobre la cual está marcada nuestra unidad de longitud *a* por sus puntos extremos *A* y *B*. Colocamos la vara a lo largo de *c*, en la posición a_1 (ver Fig. 9-1), de modo que *A* coincida con un extremo C_0 de *c*. Sobre el borde *c* marcamos el punto C_1 que coincide con el extremo *B* de nuestra vara. Luego, trasladamos la vara *a* a la posición adyacente a_2 y marcamos el punto C_2 sobre *c*, y así sucesivamente hasta llegar al otro extremo de *c*. Supongamos que la décima posición a_{10} de la vara es tal que su extremo *B* coincide aproximadamente con el extremo C_{10} de *c*. Sean c_1, c_2, ..., c_{10} los segmentos marcados en *c*.

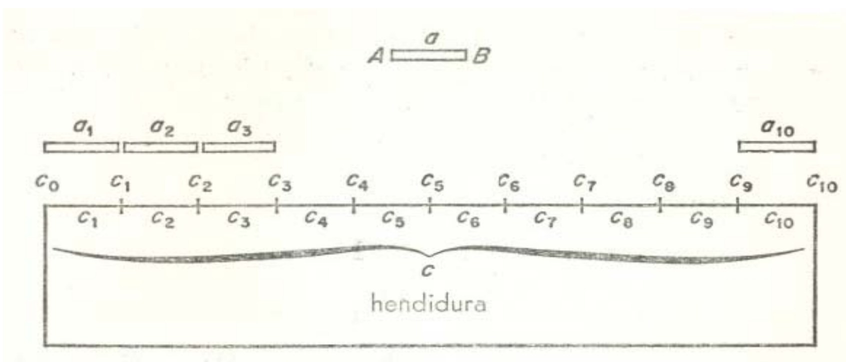


Figura 9-1.

Por la Regla 3, tenemos:

$L(a) = L(a_1) = L(a_2) = \ldots = L(a_{10}) = 1.$

Luego, por la Regla 1:

$L(c_1) = 1, \quad L(c_2) = 1, \ldots, L(c_{10}) = 1.$

Por la Regla 2:

$L(c_1 \text{ o } c_2) = 2, \quad L(c_1 \text{ o } c_2 \text{ o } c_3) = 3\ldots$

Por lo tanto:

$L(c) = L(c_1 \text{ o } c_2 \text{ o } \ldots \text{ o } c_{10}) = 10.$

Este procedimiento, el procedimiento básico para medir longitudes, sólo da números enteros como valores de las longitudes medidas. El refinamiento obvio del mismo se logra dividiendo la unidad de longitud en *n* partes iguales. (La pulgada se divide tradicionalmente de manera binaria: primero en dos partes, luego en cuatro, luego en ocho, etc. El metro se divide en forma decimal: primero en diez partes, luego en cien, etc.) De esta manera, podemos construir, por ensayo y error, una vara de medir auxiliar con un segmento marcado de longitud *d*, tal que *d* pueda ser colocado en *n* posiciones adyacentes, $d_1, d_2, \ldots, d_n$, a lo largo del borde unidad *a* (ver Fig. 9-2). Ahora podemos decir que:

$\mathbf{n} \times \mathbf{L}(d) = \mathbf{L}(a) = 1$

Por lo tanto:

$L(d) = 1 / n$

Una vez marcados sobre *a* estos segmentos parciales, podemos medir con mayor precisión la longitud de un borde dado. Cuando volvemos a medir la longitud de la hendidura *c* del ejemplo anterior, la misma puede resultar ahora, no 10, sino más exactamente 10,2. De esta manera se introducen las fracciones en las mediciones. Ya no estamos limitados a los enteros. Un valor medido puede ser cualquier número racional positivo.

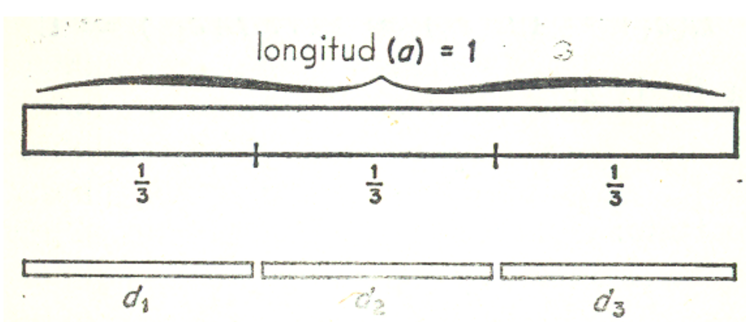
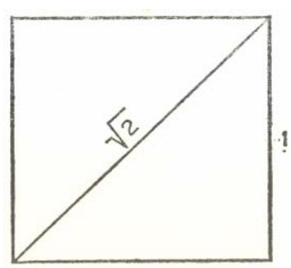


Figura 9.2

Es importante comprender que, al introducir estos refinamientos en la medición, podemos introducir fracciones cada vez más pequeñas, pero nunca podemos llegar a números que no sean racionales. Por otra parte, la clase de los valores posibles de una magnitud habitualmente es considerada, en la física, como una clase. que contiene a todos los números reales (o a todos los números reales de un intervalo especificado), es decir, que incluye tanto a los números irracionales como a los racionales. Pero los números irracionales son introducidos en una etapa posterior a la de la medición. La medición directa sólo puede brindar valores expresables en números racionales. Pero cuando formulamos leyes y hacemos cálculos con ayuda de estas leyes, los números irracionales entran en consideración. Se los introduce en un contexto teórico, no en el contexto de la medición directa.

Para aclarar lo anterior, consideraremos el teorema de Pitágoras, según el cual el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados. Se trata de un teorema de la geometría matemática, pero, cuando lo aplicamos a segmentos físicos, se convierte también en una ley física. Supongamos que en una tabla de madera cortamos un cuadrado de lado igual a la unidad de longitud. El teorema de Pitágoras nos dice que la longitud de la diagonal de este cuadrado (ver Fig. 9-3) es igual a la raíz cuadrada de 2. La raíz cuadrada de 2 es un número irracional. Hablando estrictamente, no se la puede medir con una regla basada en nuestra unidad de medida, por pequeñas que sean las subdivisiones fraccionarias. Pero cuando calculamos la longitud de la diagonal utilizando el teorema de Pitágoras, obtenemos, indirectamente, un número irracional.



1

Figura 9-3.

Análogamente, si medimos el diámetro de un disco circular de madera y hallamos que es **1,** al calcular la longitud del perímetro del disco llegamos al número irracional pi.

[. . . . .]

En nuestra descripción de la medición de longitudes aún no hemos considerado una cuestión sumamente importante: ¿qué tipo de cuerpo adoptaremos como vara de medida patrón? Para los propósitos corrientes, bastaría adoptar una vara de hierro o hasta una vara de madera, porque no sería necesario medir longitudes con gran precisión. Pero si buscamos mayor exactitud, vemos inmediatamente que nos enfrentamos con una dificultad similar a la que se nos presentó con respecto a la periodicidad.

Como se recordará, se nos planteó el problema evidente de basar nuestra unidad de tiempo en un proceso periódico de períodos iguales. En el caso presente se nos plantea el problema análogo de basar nuestra unidad de longitud en un "cuerpo rígido". Nos inclinamos a pensar que necesitamos un cuerpo que mantenga siempre exactamente la misma longitud, así como antes necesitábamos un proceso periódico cuyos intervalos de tiempo fueran siempre los mismos. Obviamente, pensamos, no queremos basar nuestra unidad de longitud en una vara de goma o de cera, que se deforme fácilmente. Supongamos que necesitamos una vara rígida, cuya forma o tamaño no se altere. Quizás definamos la "rigidez" de esta manera: una vara es rígida si la distancia entre dos puntos cualesquiera marcados sobre la misma permanece constante en el curso del tiempo.

Pero, ¿qué queremos decir exactamente por "permanecer constante"? Para explicarlo, tendríamos que introducir el concepto de longitud. A menos que dispongamos de un concepto de longitud y de un medio de medirla, ¿qué significaría decir que la distancia entre dos puntos de una vara, de hecho, permanece constante? Y si no podemos determinar esto, ¿cómo podemos definir la rigidez? Así, estamos atrapados en el mismo tipo de círculo vicioso en el cual nos encontramos cuando buscábamos la manera de identificar un proceso fuertemente periódico antes de elaborar un sistema para la medición del tiempo. Nuevamente, ¿cómo escaparemos de este círculo vicioso?

La salida es similar a aquella por la cual escapamos del círculo vicioso en la medición del tiempo: el uso de un concepto relativo en lugar de uno absoluto. Podemos, sin caer en un círculo vicioso, definir un concepto de "rigidez relativa" de un cuerpo con respecto a otro. Tomemos un cuerpo M, y otro M'. Para simplificar, supongamos que ambos tienen un borde recto. Podemos colocar los bordes juntos y comparar los puntos marcados en ellos (ver Fig. 9-5).

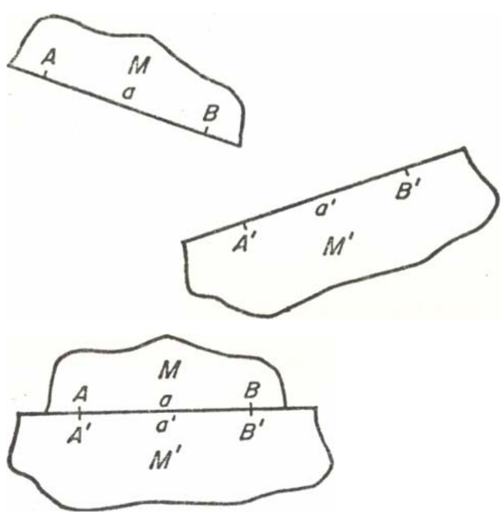


Figura 9-5.

Consideremos un par de puntos *A* y *B* de *M* que determinan el segmento *a*. Análogamente en *M'* un par de puntos *A'* y *B'* determinan el segmento *a'*. Decimos que el segmento *a* es congruente con el segmento *a'* si, cuando se juntan los dos bordes de modo que el punto *A* coincida con el punto *A'*, el punto *B* coincide con *B'*. Este es nuestro procedimiento operativo para decidir que los segmentos *a* y *a'* son congruentes. Hallamos que, toda vez que efectuamos esta prueba, el par de puntos coincide, por lo cual concluimos que si repetimos el experimento en cualquier instante futuro, el resultado probablemente será el mismo. Además, supongamos que se observe que *todo* segmento marcado de esta manera en *M* es congruente, toda vez que se hace una prueba, con el segmento correspondiente marcado en *M'*. Decimos entonces que *M* y *M'* son *rígidos uno con respecto al otro*.

Es importante comprender que aquí no hay ningún círculo vicioso. No podemos hablar ni hablamos de la rigidez absoluta de *M*; no podemos decir que la longitud de *M* permanece siempre constante. Pero tiene sentido decir que los dos cuerpos son rígidos *uno con respecto al otro*. Si elegimos a *M* como vara de medir hallamos que los segmentos marcados en *M'* mantienen constante su longitud. Si elegimos *M'* como vara de medir, los segmentos de *M* permanecen constantes. Tenemos aquí un concepto de rigidez relativa, la rigidez de un cuerpo con respecto al otro.

Cuando examinamos los diversos cuerpos del mundo, encontramos muchos que no son rígidos unos con respecto a otros. Tomemos mis dos manos, por ejemplo. Las coloco juntas de modo que ciertos pares de puntos de los extremos de mis dedos coincidan. Las coloco juntas nuevamente. Las posiciones de mis dedos han cambiado. Los mismos pares de puntos ya no son congruentes, de modo que no puedo decir que mis manos han permanecido rígidas una con respecto a la otra. Lo mismo sucede si comparamos dos cuerpos hechos de cera o uno de hierro y otro de goma blanda. No son rígidos uno con respecto al otro. Pero, así como hallamos que el mundo contiene una clase muy grande de procesos que son equivalentes en su periodicidad, así también encontramos otra afortunada circunstancia accidental de la naturaleza. Descubrimos empíricamente que hay una clase muy amplia de cuerpos que son aproximadamente rígidos unos con respecto a otros. Dos cuerpos de metal - hierro, cobre, etc.- son rígidos uno con respecto al otro; lo mismo la piedra y hasta la madera, si está bien seca y ya no es verde. Hallamos que muchas sustancias sólidas son de tal tipo que los cuerpos hechos de esas sustancias son rígidos unos con respecto a otros. Naturalmente que ellos dejan de ser rígidos si los curvamos o hacemos que se dilaten calentándolos, etc. Pero mientras no intervengan circunstancias anormales, estos cuerpos se comportan de una manera sumamente regular en lo que concierne a sus longitudes. Cuando hacemos comparaciones aproximadas de unos con otros, los hallamos relativamente rígidos.

El lector recordará que, en nuestro examen de la periodicidad, vimos que no hay ninguna razón lógica que nos obligue a basar nuestra medición del tiempo en uno de los procesos periódicos pertenecientes a la gran clase de procesos equivalentes. Elegimos tal proceso sólo porque la elección daba como resultado una mayor simplicidad de nuestras leyes naturales. En el caso presente, es menester realizar una elección similar. No hay ninguna necesidad lógica de basar la medición de la longitud en un miembro de una clase grande de objetos relativamente rígidos. Elegimos tales cuerpos porque es más conveniente. Si optáramos por tomar como unidad de longitud una vara de goma o de cera, hallaríamos muy pocos cuerpos del mundo, o quizás ninguno, que fueran relativamente rígidos de acuerdo con nuestro patrón. Nuestra descripción de la naturaleza, entonces, se complicaría enormemente. Tendríamos que decir, por ejemplo, que los cuerpos de hierro cambian constantemente de longitud, porque cada vez que los medimos con nuestra vara de goma flexible obtenemos un valor diferente. Ningún científico, por supuesto, querría abrumarse con las complejas leyes físicas que sería menester concebir para describir tales fenómenos. Por otra parte, si elegimos una barra metálica como patrón de longitud, hallamos que un número muy grande de cuerpos del mundo son rígidos cuando se los mide con ella. De este modo, se introduce una regularidad y una simplicidad mucho mayores en nuestra descripción del mundo.

Esta regularidad deriva, claro está, de la naturaleza del mundo real. Podríamos vivir en un mundo en el cual los cuerpos de hierro fueran rígidos unos con respecto a otros y los cuerpos de cobre lo fueran entre sí, pero un cuerpo de hierro no fuera rígido con respecto a otro de cobre. En esto no hay ninguna contradicción lógica. Es un mundo posible. Si viviéramos en tal mundo y descubriéramos que contiene una gran cantidad de cobre y de hierro, ¿cómo elegiríamos entre los dos una base adecuada para la medición? Cualquier elección presentaría una desventaja. Si otros metales estuvieran análogamente en desacuerdo, por decido así, unos con respecto a otros, nuestras elecciones serían aun más difíciles. Afortunadamente, vivimos en un mundo en el que esto no sucede. Todos los metales son relativamente rígidos entre sí; por lo tanto, podemos adoptar a cualquiera de ellos como patrón. Al hacerlo, hallamos que otros cuerpos metálicos son rígidos.

Es tan obviamente conveniente basar nuestra medición de la longitud en una vara de metal y no en una vara de goma, así como basar nuestra medición del tiempo en un pénulo y no en el latido de un pulso, que tendemos a olvidar que se trata de componentes convencionales de nuestra elección de un patrón. Es un componente que destaqué en mi tesis de doctorado sobre el espacio [1] y que posteriormente Reichenbach destacó en su libro sobre el espacio y el tiempo. La elección es convencional en el sentido de que no hay ninguna razón lógica que nos impida elegir la vara de goma y el latido del pulso como patrones y luego pagar el precio de nuestra eleccion elaborando una física fantásticamente compleja para explicar un mundo de enorme irregularidad. Esto no significa, claro está, que la elección sea arbitraria, que una elección sea tan buena como cualquier otra. Hay razones de carácter práctico - a saber, que el mundo es como es - para preferir la vara de acero y el péndulo.

Una vez que hemos elegido un patrón de medida, como una vara de acero, debemos hacer otra elección. Podemos decir que la longitud de esta vara particular es nuestra unidad, independientemente de los cambios de su temperatura, de su grado de magnetización, etc., o podemos introducir factores de corrección que dependen de tales cambios. La primera elección, obviamente, nos brinda la regla más simple, pero si la adoptamos debemos afrontar nuevamente extrañas consecuencias. Si se calienta la vara y luego se la usa para medir, hallamos que todos los otros cuerpos del mundo se han contraído. Cuando la vara se enfría, el resto del mundo se dilata nuevamente. Nos veríamos obligados a formular toda suerte de curiosas y complicadas leyes, pero no habría ninguna contradicción 1ógica. Por esta razón, podemos decir que es una elección posible.

El segundo procedimiento consiste en introducir factores de corrección. En lugar de estipular que el segmento entre las dos marcas será considerado siempre como la longitud elegida l_0 (digamos, 1 o 100), decretamos que tiene la longitud normal l_0 sólo cuando la vara está a la temperatura T_0, que elegimos como temperatura "normal", mientras que a cualquier otra temperatura T la longitud del segmento estará dada por la ecuación

$$l = l_0\,[\mathbf{1} + \beta\,(T-T_0)],$$

donde β es una constante (llamada "coeficiente de dilatación térmica") que es característica de la sustancia de la cual está hecha la vara. Correcciones similares se introducen del mismo modo para otras mediciones, tales como la presencia de campos magnéticos, que también pueden afectar a la longitud de la vara. Los físicos prefieren decididamente este procedimiento más complicado, el de la introducción de factores de corrección, por la misma razón por la cual eligen una vara de metal y no una de goma: porque esa elección conduce a una gran simplificación de las leyes físicas.

[. . . . .]

En ocasiones se plantea un problema desconcertante en lo que concierne tanto a las magnitudes primitivas como a las derivadas. Para explicarlo con claridad, imaginemos que tenemos dos magnitudes M_1 y M_2. Cuando examinamos la definición de M_1 o las reglas que nos enseñan a medirla, hallamos que interviene la magnitud M_2 . Cuando pasamos a la definición o a las reglas referentes a M 2, hallamos que interviene M_1. Al principio, esto da la impresión de que hay un círculo vicioso en los procedimientos, pero es fácil eludir tal círculo aplicando lo que se llama el método de las aproximaciones sucesivas. Se recordará que en un capítulo anterior examinamos la ecuación que define la longitud de una vara de medir. En esta ecuación aparece un factor de corrección para la dilatación térmica; en otras palabras, la temperatura interviene en el conjunto de reglas utilizadas para la medición de la longitud. Por otra parte, el lector recordará que en nuestras reglas para medir la temperatura nos referimos a la longitud, o, más bien, al volumen de cierto líquido de prueba utilizado en el termómetro; pero, por supuesto, el volumen se determina con ayuda de la longitud. Así, pareciera que hay dos magnitudes, la longitud y la temperatura, cada una de las cuales depende de la otra en cuanto a su definición. Parece haber un cículo vicioso; pero, en realidad, no lo hay.

Una solución es la siguiente. Primero, introducimos el concepto de longitud sin considerar el factor de corrección para la dilatación térmica. Este concepto no nos permite realizar mediciones de gran precisión, pero es bastante satisfactorio si no se requiere gran precisión. Por ejemplo, si se usa una vara de hierro para la medición, la dilatación térmica es tan pequeña en condiciones normales que las mediciones serán bastante precisas. De este modo, obtenemos un primer concepto, L_1, de longitud espacial. Ahora podemos utilizar este concepto para la construción de un termómetro. Con ayuda de la vara de hierro, marcamos una escala a lo largo del tubo que contiene el líquido de prueba. Puesto que podemos construir esta escala con bastante precisión, también obtenemos bastante precisión al medir la temperatura con esta escala. De tal modo, introducimos nuestro primer concepto de temperatura T_1. Luego podemos utilizar T_1 para establecer un concepto refinado de longitud L_2. Lo hacemos introduciendo T_1 en las reglas para definir la longitud. Disponemos ahora del concepto refinado de longitud, L_2 (corregido para la dilatación térmica de la vara de hierro), para construir una escala más precisa destinada a nuestro termómetro. Esto conduce, claro está, a T_2, un concepto refinado de la temperatura.

En el caso de la longitud y de la temperatura, el procedimiento que acabamos de describir refina ambos conceptos hasta un punto en el cual los errores son sumamente pequeños. En otros casos, puede ser necesario ir y volver varias veces antes de que los sucesivos refinamientos conduzcan a mediciones suficientemente precisas para nuestros propósitos. Debe admitirse que nunca llegamos a un método absolutamente perfecto para medir uno u otro concepto. Pero podemos decir que cuanto más repetimos este procedimiento - comenzando con dos conceptos toscos y luego refinando cada uno de ellos con ayuda del otro - tanto más precisas serán nuestras mediciones. Mediante esta técnica de aproximaciones sucesivas escapamos de lo que parece ser, al principio, un círculo vicioso.

[. . . . .]

---

1. *Der Raum. Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre* (Jena: University of Jena, 1921; Berlín: Verlag von Reuther & Reichard, 1922).

* Párrafos selectos de los capítulos 9 (*Longitud*) y 10 (*Las magnitudes derivadas y el lenguaje cuantitativo*) de *Fundamentación lógica de la física*, Sudamericana, Bs.As., 1969, Traducción de Néstor Miguens.

Advierta el lector que un corpus de expresiones lingüísticas y una comunidad lingüística correspondientes se determinan de un modo análogo - e.d. circularmente. Véase *Gramática elemental y explicación de significados*, § "¿Qué debemos entender por *comunidad lingüística*?". E. S.

del hablar