Benson Mates

SINTAXIS Y SEMÁNTICA DEL LENGUAJE λ *

3. 1. La gramática de λ.

Las *expresiones* del lenguaje de λ son series (de longitud finita) de símbolos que, a su vez, se clasifican como sigue:

A *Variables.* Las variables son las letras minúsculas en cursiva de '*u*' a '*z*', con o sin números suscritos (esto es, suscritos que son cifras arábigas representativas de enteros positivos).

B *Constantes*.

(I) Las *constantes lógicas* son los ocho símbolos: $-$ $\vee$ ( ) & $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ $\exists$

(II) Las *constantes no lógicas* se dividen en dos clases:

(a) *Predicados,* que son letras mayúsculas en cursiva con o sin números suscritos y/o números superesescritos.

(b) *Constantes individuales,* que son las letras minúsculas en cursiva de '*a*' hasta '*t*' con o sin números suscritos.

Un *predicado de grado n* (o *predicado n-ario)* es un predicado que tiene como superescrito una cifra representativa del entero positivo *n.*

Una *letra enunciativa* es un predicado carente de superescrito.

Un *símbolo individual* es una variable o una constante individual.

Una *fórmula atómica* es una expresión que consta o de una letra enunciativa sola, o (para algún entero positivo n) de un predicado n-ario seguido por una serie (de longitud n) de símbolos individuales.

Una *fórmula* es una expresión que o es una fórmula atómica, o, en otro caso, está formada a partir de una o más fórmulas atómicas por un número finito de aplicaciones de las siguientes reglas:

(I) Si ϕ es una fórmula, entonces -ϕ es una fórmula.

(II) Si ϕ y ψ son fórmulas, entonces (ϕ v ψ), (ϕ & ψ), ($\phi \rightarrow \psi$) y ($\phi \leftrightarrow \psi$) son fórmulas.

(II) Si ϕ es una fórmula y α es una variable, entonces $(\alpha)\phi$ y $(\exists\alpha)\phi$ son fórmulas.

Además, una ocurrencia de una variable α en una fórmula ϕ es *ligada,* si se da dentro de una ocurrencia en ϕ de una fórmula de la forma $(\alpha)\psi$ o de la forma $(\exists\alpha)\psi$; de otro modo es una ocurrencia *libre.*

Finalmente, un *enunciado* es una fórmula en la que no ocurre variable libre.

3. 2. Explicaciones y ejemplos.

Nos apresuramos a añadir algunas explicaciones y ejemplos a la precedente exposición, condensada en exceso. Nótese en primer lugar que, si bien es verdad que no hemos atribuido aún significado a los diferentes símbolos y fórmulas de λ (algunos autores prefieren, en este incipiente estadio, hablar de un 'cálculo no interpretado' mejor que de un 'lenguaje'), no obstante la estructura de λ ha sido, obviamente, modelada conforme a la del lenguaje natural. En correspondencia con las palabras del lenguaje natural 'no', 'o', 'y', 'si..., entonces', y 'si y solamente si', tenemos en el lenguaje artificial los símbolos '–', 'v', '&', '$\rightarrow$', y '$\leftrightarrow$'. Los nombres y otras expresiones denotativas de sujetos en el lenguaje natural, p. ej., 'Sócrates', son representados por las constantes individuales de λ; y los predicados del lenguaje natural, p. ej., 'es el maestro del maestro de Aristóteles', son representados por los predicados de λ. En correspondencia con las formas enunciativas, tenemos las fórmulas de λ. (Por otra parte, obsérvese que λ no contiene correlato o contrapartida de las formas descriptivas; el lenguaje más complejo λ', que será introducido posteriormente, diferirá de λ justo en este respecto). Las expresiones formales de la forma (α) y $(\exists\alpha)$, donde α es una variable, representan a los cuantificadores universal y existencial, respectivamente. Y los enunciados de λ se toman como contrapartida de los enunciados del lenguaje natural.

Hemos estado hablando aquí, de un modo más bien vago, de 'contrapartidas'. Es difícil precisar esta noción, y al presente y primitivo estadio de la teoría en que nos encontramos, nos contentaremos tan sólo con emitir la siguiente advertencia: no vaya a pensarse que las contrapartidas formales sean cabalmente 'abreviaturas' o 'modos breves de escribir' las expresiones correspondientes en el lenguaje natural. Bien es verdad que podemos leer '&' como 'y', y 'v' como 'o', e incluso '$\rightarrow$' como 'si..., entonces'. Pero como se entienda que tales lecturas indican especie alguna de sinonimia, surgirán serias confusiones.

Oportunamente determinaremos todo cuanto sea concerniente a las condiciones de verdad de los enunciados de λ; y sólo después de que esta tarea haya sido realizada, será posible plantearse con sentido la cuestión de saber si tal o cual enunciado de λ tiene (relativamente a una interpretación dada de los símbolos que ocurren en él) las mismas condiciones de verdad que un enunciado dado del lenguaje natural.

Asimismo ha de ponerse de manifiesto que siempre que un par de enunciados formales ϕ y ψ tengan respectivamente las mismas condiciones de verdad que un par de enunciados castellanos *S* y *S'*, con relación a una interpretación dada del formalismo, sucederá que (componiendo dicho par) el enunciado formal

$(\phi \,\&\, \psi)$

tendrá las mismas condiciones de verdad que el enunciado castellano

S y S'.

En tales condiciones, y en este sentido, puede decirse que '&' e 'y' tienen el mismo significado. La misma especie de resultado, si bien con un número aún mayor de reservas y limitaciones, valdrá en lo que hace a los restantes símbolos y expresiones de λ, y esto es lo que justifica la lectura que de ellos se hace normalmente. Ello no obstante, es preciso subrayar que los conceptos básicos han sido definidos de un modo puramente formal, es decir, en forma tal que cualquier enunciado, fórmula, variable, u otra expresión de λ pueda ser identificada como tal simplemente *por su figura,* sin considerar para nada si puede o no 'expresar un pensamiento completo', 'representar a un individuo', o cualquier otra circunstancia de esta índole. La siguiente galería de ejemplos será útil al respecto.

Ejemplos de variables de λ:

$x \quad y \quad z_1 \quad u_{26} \quad v_{398}$

Ejemplos de signos que no son variables de λ :

$x_0 \quad x_{\mathrm{iv}} \quad x' \quad \phi \quad \psi \quad \alpha \quad \beta \quad \Gamma \quad \Delta \quad F$

Ejemplos de constantes individuales de λ :

$a \quad a_1 \quad b_{16} \quad c_4 \quad t_{28}$

Ejemplos de signos que no son constantes individuales de λ:

3 '*a*' Scott a_0

Ejemplos de predicados de λ :

$F \quad G_1 \quad G_1^2 \quad G^4 \quad H_{22}^{16} \quad M_{321}^{16}$

De los predicados que se acaban de mencionar, los dos primeros son letras enunciativas, el tercero es un predicado de grado 2, el cuarto es de grado 4, y el quinto y sexto son de grado 16. Todos los ejemplos aducidos de variables y constantes individuales son también, por supuesto, ejemplos de símbolos individuales.

Ejemplos de fórmulas atómicas de λ :

$F \quad G_1 \quad G_1^2ab \quad G^4x_1ya_2a_2 \quad H_{16}^1x$

Ejemplos de signos que no son fórmulas atómicas de λ :

$x \quad y \quad Fx_1$ x es azul $\phi \quad (F \vee G)$

Volviendo ahora a la definición de 'fórmula', advirtamos de paso que puede ser establecida en otros términos como sigue:

(1) Todas las fórmulas atómicas son fórmulas.

(2) El resultado de anteponer a modo de prefijo el signo de negación (' – ') a cualquier fórmula, es también una fórmula.

(3) El resultado de insertar el signo angular, o el signo de conjunción, o la flecha, o la flecha de doble punta, entre dos fórmulas (o entre dos ocurrencias de la misma fórmula) y de encerrar el total dentro de un par de paréntesis, es también una fórmula.

(4) Siendo α una variable cualquiera, el resultado de anteponer a cualquier fórmula, a modo de prefijo, (α) o $(\exists\alpha)$, es también una fórmula

(5) No hay fórmula que no sea resultado de alguna de las cuatro reglas precedentes.

Construyamos ahora algunos ejemplos. Comoquiera que las expresiones que siguen a continuación, son todas fórmulas atómicas

$F \quad G_1 \quad H^1x \quad G_1^2xy \quad G_1^2aa$,

la anterior definición nos informa que todas ellas son fórmulas. Aplicando la cláusula (I) vemos que las expresiones

$-F \quad --G_1^2xy$

son también fórmulas. Aplicando la cláusula (II) podemos obtener fórmulas tales como

$(-F \rightarrow G_1^2aa) \quad (G_1^2xy \leftrightarrow G_1^2aa)$

y, aplicando la cláusula (III), podemos producir, entre otras muchas, las tres fórmulas siguientes

$(x)H^1x \quad (\exists x)(G_1^2xy \leftrightarrow G_1^2aa) \quad (y)(-F \rightarrow G_1^2aa)$.

Por ulterior aplicación de la cláusula (I) resultan las dos fórmulas

$-(\exists x)(G_1{}^2xy \leftrightarrow G_1{}^2aa) \quad --G_1{}^2xy$

y si continuamos por este camino podemos construir la f6rmula

$-(x)(\exists y)(-\exists x)(G_1{}^2xy \leftrightarrow G_1{}^2aa) \,\&\, (-G_1{}^2xy \rightarrow (y)\,(-F \rightarrow G_1{}^2aa)))$

y otras de tanta complejidad como se quiera.

En contraste con lo anterior, he aquí unos cuantos ejemplos de expresiones que a pesar de las apariencias y erróneas interpretaciones, no son fórmulas de λ.

$Fx \quad F \vee G \quad (\phi \vee \psi) \quad F_1{}^2xyz \quad F_1{}^1x_0$

Al objeto de disponer de algunos ejemplos de ocurrencias de variables libres y ligadas consideremos la fórmula

(1) $((x)(F_1{}^2xa \rightarrow (\exists y)(F_1{}^2xy \,\&\, G_1{}^2zy)) \vee F_1{}^2xa)$.

En esta fórmula hay cuatro ocurrencias de la variable '*x*'; de ellas, las tres primeras son ligadas y la cuarta es libre. La primera ocurrencia de 'x' en (1) es ligada porque está dentro de una ocurrencia en (1) de la fórmula

(2) $(x)(F_1{}^2xa \rightarrow (\exists y)(F_1{}^2xy \,\&\, G_1{}^2zy))$,

que es de la forma $(\alpha)\psi$, donde α es '*x*' y ψ es la parte de (2) que sigue a '(x)'. La segunda y tercera ocurrencias de '*x*' en (1) son ligadas por la misma razón. La cuarta ocurrencia, sin embargo, no es ligada porque no está dentro de una ocurrencia en (1) de una fórmula que empiece con '(x)' o '($\exists$x)'. Por lo que hace a la variable '*y*', hay de ella tres ocurrencias, todas ligadas. Hay una ocurrencia de 'z' y esta ocurrencia es libre. Porque, aun cuando está dentro de una ocurrencia de (2), y también dentro de una ocurrencia de

(3) $(\exists y)(F_1{}^2xy \,\&\, G_1{}^2zy)$

en (1), no está dentro de una ocurrencia en (1) de una fórmula que empiece con '(z)' o '($\exists$z)'. La constante individual '*a*' ocurre dos veces, pero esas ocurrencias no son ni libres ni ligadas. Similarmente, ninguna variable distinta de '*x*', '*y*', y 'z' ocurre, libre o ligada, en la fórmula (1). No obstante, dado que la fórmula en cuestión contiene al menos una ocurrencia libre de una variable, no es un enunciado.

Ocasionalmente, el estudiante se siente perplejo cuando se le dice que mientras la segunda ocurrencia de '*x*' en '$(x)\,F^1x$' es una ocurrencia ligada, la sola ocurrencia de '*x*' en 'F^1x' es libre, a pesar de que 'F^1x' ocurra en '$(x)\,F^1x$'. La clave de la cuestión se encuentra aquí en el hecho de que el estar libre y el estar ligado son nociones relativas y no absolutas : una ocurrencia de una variable es ligada o libre *con relación a una fórmula dada*; lo que es ligado con relación a una fórmula, puede ser libre con relación a otra. Probablemente contribuye también a aumentar la confusión, la oscuridad que circunda a la noción de *ocurrencia*. Sólo nuestro propósito de no introducir adicional complejidad nos impide abandonar esta confusa noción y definir, en lugar de ella, una relación ternaria 'α es ligada en el n-simo lugar en ϕ ', donde los valores de 'α' son variables, los de 'ϕ' fórmulas, y los de '*n*' enteros positivos. Una tal definición permitiría no hablar de 'ocurrencias', pero resulta sobremanera complicada; en consecuencia, esperamos que baste con la definición ya aludida.

Conviene llamar explícitamente la atención sobre el hecho de que sólo las expresiones (α) y ($\exists\alpha$) pueden ligar una ocurrencia de la variable α, así la ocurrencia de '*y*' en la fórmula '$(x)F^1y$', es libre.

3. 3. Terminología sintáctica adicional.

La descripción sintáctica de fórmulas y otras expresiones resultará grandemente facilitada si introducimos alguna terminología adicional. Nuestra elección de términos está condicionada por el método conforme al cual interpretaremos más adelante las fórmulas de λ; pero nótese que la aplicabilidad de dichos términos, como es asimismo el caso de los ya introducidos, queda exclusivamente determinada por la figura de las fórmulas en consideración. Una vez más, daremos ejemplos tras las definiciones.

Para cualesquiera fórmulas ϕ y ψ, y para cualquier variable α,

1) $-\phi$ recibe el nombre de *negación* de ϕ ;

2) $(\phi \,\&\, \psi)$ recibe el nombre de *conjunción*, con ϕ y ψ como *conyuntos* ;

3) $(\phi \text{ v } \psi)$ recibe el nombre de *disyunción*, con ϕ y ψ como *disyuntos* ;

4) $(\phi \rightarrow \psi)$ recibe el nombre de *condicional*, con ϕ como *antecedente* y ψ como

consiguiente ;

5) $(\phi \leftrightarrow \psi)$ recibe el nombre de *bicondiciona l* ;

6) $(\alpha)\phi$ recibe el nombre de *generalización universal de ϕ con respecto a α* ;

7) $(\exists\alpha)\phi$ recibe el nombre de *generalización existencial de ϕ con respecto a α* ;

Los símbolos '&', 'v', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$', ' – ' reciben el nombre de *conectivas*.

Un *cuantificador universal* es una expresión de la forma (α), donde α es una variable.

Un *cuantificador existencial* es una expresión de la forma ($\exists\alpha$), donde α es una variable.

Una fórmula que no sea una fórmula atómica es denominada *general* si comienza con un cuantificador universal o existencial; de otro modo es llamada *molecular.*

Un enunciado es un *enunciado del cálculo enunciativo* (o *enunciado del CE,* o *fórmula del CE)* si no contiene ningún símbolo individual.

Una ocurrencia de una fórmula ψ en una fórmula ϕ es *ligada* si está propiamente contenida dentro de (es decir, contenida dentro de, pero no idéntica a) una ocurrencia en ϕ de una fórmula de la forma $(\alpha)\theta$, o de la forma $(\exists\alpha)\theta$; de otro modo es una ocurrencia *libre.* Esta definición no debe ser confundida con la definición, un tanto similar, de 'ligada' y 'libre' aplicada a variables. Nótese que una ocurrencia de (α) o $(\exists\alpha)$ puede ligar una fórmula que la siga incluso en el caso de que la variable α no ocurra en esa fórmula.

Finalmente, para cualquier fórmula ϕ, variable α, y símbolo individual β, $\phi\,\alpha/\beta$ es el resultado de reemplazar todas las ocurrencias libres de α en ϕ por ocurrencias de β.

Con vistas a ilustrar el uso de la precedente terminología, efectuaremos, haciendo uso de la misma, una descripción de la extensa fórmula (1), que fue ya considerada con referencia a ocurrencias libres y ligadas de variables. Esa fórmula es una disyunción, uno de cuyos disyuntos es la fórmula atómica '$F_1{}^2xa$' mientras el otro disyunto es la generalización universal con respecto a 'x' de un condicional que tiene como antecedente la fórmula '$F_1{}^2xa$' y como consiguiente la generalización existencial con respecto a 'y' de una conjunción, uno de cuyos conyuntos es '$F_1{}^2xa$' mientras el otro es '$G_1{}^2zy$'. En esa misma fórmula la primera ocurrencia de '$F_1{}^2xa$' es una ocurrencia ligada (y obsérvese que continuaría siendo ligada si el cuantificador precedente fuese '(y)', en lugar de '(x)', y la segunda ocurrencia es libre. La ocurrencia de

$(\exists y)(F_1{}^2xy\text{'} \,\&\, G_1{}^2zy)$

es ligada. pero la ocurrencia de

$(x)(F_1{}^2xa \rightarrow (\exists y)(F_1{}^2xy \,\&\, G_1{}^2zy))$

es libre, como lo es la ocurrencia de la fórmula total. La frase 'propiamente contenida dentro de' en esta definición significa 'contenida dentro de y no idéntica a'; si hablamos de las fórmulas que están contenidas dentro de una fórmula dada, consideramos incluida entre ellas, en particular, la propia fórmula dada; pero si hablamos de las fórmulas que están *propiamente* contenidas dentro de una fórmula dada, consideramos excluida de ellas a la propia fórmula dada.

Ejemplos de enunciados atómicos :

$F_1 a \quad G_2{}^4abab \quad H_1{}^6 abc_2c_2ba$

Ejemplos de enunciados generales :

$(x)F^1x$ $(x)(\exists y)(F_1{}^2xy \;\&\; G_2{}^3 yxb)$

Ejemplos de enunciados moleculares:

(F v G) $((x)\mathrm{F}^{1}x \;\&\; (\exists y)\mathrm{G}^{1}y)$ $--P$

Finalmente, si ϕ es '$F^1 x$', α es 'x', y β es 'a', entonces $\phi\,\alpha/\beta$ es '$F^1 a$'. También, si ϕ es 'F^2xa', α es 'x', y β es 'a', entonces $\phi\,\alpha/\beta$ es 'F^2aa'. Si ϕ es '(F^1x v (x)F^1x)', α es 'x', y β es 'b', entonces $\phi\,\alpha/\beta$ es '(F^1b v (x)F^1x)'. Si ϕ es '$(x)F^1x$', α es 'x', y β es 'a', entonces $\phi\,\alpha/\beta$ es '$(x)F^1x$' . Y si ϕ es '$F^1 a$', α es 'x', β es 'b', entonces $\phi\,\alpha/\beta$ es '$F^1 a$'.

ooo

4. 1. Interpretaciones del lenguaje formal λ.

Caracterizaremos primero la situación de un modo elemental, y trataremos luego de ser más precisos. Dado un enunciado ϕ de λ, una interpretación asigna una denotación a cada una de las constantes no lógicas que ocurran en ϕ. A las constantes individuales les asigna individuos (de algún universo de discurso); a los predicados de grado 1 les asigna propiedades (más precisamente, conjuntos) de individuos; a los predicados de grado 2 les asigna relaciones binarias de individuos; a los predicados de grado 3 les asigna relaciones ternarias de individuos, y así sucesivamente; y a las letras enunciativas les asigna valores de verdad. Bajo una tal interpretación, se considera que los enunciados atómicos establecen que los individuos asignados a sus constantes individuales guardan las relaciones asignadas con respecto a sus predicados (o, si el enunciado atómico es una letra enunciativa, se considera que ésta representa el valor de verdad a ella asignada). Si, por añadidura, las constantes lógicas que ocurren en ϕ son entendidas al modo usual entre los lógicos (esto es, 'v' como representativa de 'o'; '–', de 'no'; el cuantificador universal, de 'todo', etc.) encontraremos que ϕ es verdadero o falso, y por tanto, al menos dentro de tales límites, significativo.

Unos cuantos ejemplos indicarán lo que aquí se pretende mostrar. Considérese el enunciado 'D^1s'. Si, de acuerdo con una interpretación particular $\Im$ cuyo universo de discurso sea el conjunto de los seres humanos la constante individual 's' denota a Sócrates y el predicado 'D^1' denota al conjunto de todas las personas que murieron en 399 a. C., entonces, bajo una tal interpretación, el enunciado 'D^1s' establece que Sócrates pertenece al conjunto de todas las personas que murieron en 399 a. C., esto es, que Sócrates murió en 399 a. C., y, conforme a ello, ese enunciado es verdadero. En cambio, el enunciado ' $-D^1s$' establece, bajo esa interpretación, que Sócrates no murió en 399 a. C., y por tanto, es falso. Bajo idéntica interpretación, el enunciado '$(D^1s \text{ v } -D^1s)$' dice que o Sócrates murió en 399 a. C. o no murió en 399 a. C.; este nuevo ejemplo es, por consiguiente, verdadero. Similarmente, continuando bajo la interpretación $\Im$, el enunciado '$(\exists x)\, D^1x$' dice que alguien murió en 399 a. C., lo cual es verdadero; mientras '$(x)\, D^1x$' dice que todo el mundo murió en 399 a. C., lo cual es falso.

Considérese ahora una interpretación distinta $\Im$', que asigna a '*s*' el individuo Sir Walter Scott y a 'D^1', el conjunto de todas las personas que escribieron *Los Asfodelos*. Bajo esta interpretación 'D^1s' es falso; ' $- D^1s$' es verdadero; '$(D^1s \vee - D^1s)$' es verdadero; '$(\exists x)\, D^1x$' es verdadero; '$(x)\, D^1x$' es falso. Así vemos que el valor de verdad de un enunciado puede cambiar al pasar de una interpretación a otra, y en la mayoría de los casos, ciertamente, cambiará.

......

Procedamos ahora a una más cuidadosa presentación de estas materias. Resulta conveniente definir 'interpretación' de modo tal que cada interpretación asigne denotaciones a *todas* las constantes no lógicas del lenguaje λ, y no solamente a las pocas que de hecho ocurran en los enunciados que, de momento, caigan bajo consideración. Diremos que dar una interpretación de nuestro lenguaje artificial es (1) especificar un dominio no vacío D (esto es, un conjunto no vacío) como el universo de discurso; (2) asignar a cada constante individual un elemento de D) ; (3) asignar a cada predicado n-ario una relación n-aria entre elementos de D) ; y (4) asignar a cada letra enunciativa uno de los valores de verdad V (verdad) o F (falsedad).

Así, pues, una *interpretación* de λ consta de un dominio no vacío D juntamente con una asignación o atribución que asocie con cada constante individual de λ un elemento de D, con cada predicado n-ario de λ una relación n-aria entre elementos de D, y con cada letra enunciativa de λ uno de los valores de verdad V o F. (En esta definición consideramos que una relación unitaria entre elementos de D es simplemente un conjunto de elementos de D, una relación binaria entre elementos de D es un conjunto de pares ordenados de elementos de D, una relación ternaria entre elementos de D es un conjunto de triplos ordenados, y así sucesivamente).

......

4. 2. Verdad

Nuestro inmediato propósito es aclarar qué es lo que se entiende al decir que un enunciado de λ es verdadero o falso con respecto a una interpretación dada de λ. En otras palabras, pretendemos dar una definición exacta de la locución

ϕ es verdadero bajo $\Im$,

donde los valores de 'ϕ" son enunciados de λ y los valores de '$\Im$' son interpretaciones de λ.

La definición completa es bastante larga, y las cláusulas relativas a los cuantificadores envuelven ciertas complicaciones. Antes de presentarla *in toto*, consideraremos cómo *cabría* formularla si pudiéramos restringirnos a enunciados que no contengan cuantificadores.

Como es obvio por las definiciones de ‘enunciado’ y ‘fórmula’, cualquier enunciado de λ que no contenga. cuantificadores, o es un enunciado atómico o está construido a partir de enunciados atómicos por medio de conectivas. (Por el contrario, los enunciados que contienen cuantificadores pueden no cumplir tal condición; por ejemplo, el enunciado ‘$(\exists x)$ $(Fx\&Gx)$’ no es atómico ni contiene como parte enunciado atómico alguno). De esta suerte si, con relación a una interpretación dada $\Im$, establecemos las condiciones bajo las cuales son verdaderos los enunciados atómicos, y si indicamos cómo los valores de verdad de los enunciados moleculares dependen de los valores de verdad de sus partes, habremos definido la verdad con respecto a $\Im$ para todos los enunciados en que no ocurran cuantificadores.

Una tal definición discurriría como sigue. Sea $\Im$ una interpretación cualquiera, y sea ϕ cualquier enunciado de λ exento de cuantificadores. Entonces

1) si ϕ es una letra enunciativa, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si $\Im$ asigna V a ϕ; y

2) si ϕ es atómico y no es una letra enunciativa, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si los objetos que $\Im$ asigna a las constantes individuales de ϕ (tomándolos en el orden en que sus correspondientes constantes ocurren en ϕ) guardan entre sí la relación que $\Im$ asigna al predicado de ϕ; y

3) si $\phi = -\psi$, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si ψ no es verdadero bajo $\Im$; y

4) si $\phi = (\psi \text{ v } \chi)$ para enunciados ψ, χ, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si ψ es verdadero bajo $\Im$ o χ es verdadero bajo $\Im$ o ambas cosas ; y

5) si $\phi = (\psi \,\&\, \chi)$ para enunciados ψ, χ, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si ψ es verdadero bajo $\Im$ y χ es verdadero bajo $\Im$: y

6) si $\phi = (\psi \rightarrow \chi)$ para enunciados ψ, χ, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si o ψ no es verdadero bajo $\Im$, o χ es verdadero bajo$\Im$, o ambas cosas; y

7) si $\phi = (\psi \leftrightarrow \chi)$ para enunciados ψ,χ, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si o ψ y χ son ambos verdaderos o ambos no verdaderos bajo $\Im$.

Por otra parte, ϕ es *falso* bajo $\Im$ si y solamente si ϕ no es verdadero bajo $\Im$.

Antes de pasar al examen de ejemplos concretos, será útil añadir algunos comentarios a la anterior definición al objeto de reducir al mínimo las dificultades que pudiera originar la notación en ella empleada.

De acuerdo con la cláusula l, un enunciado atómico que sea justamente una letra enunciativa, se ha de contar como verdadero bajo una interpretación si y solamente si la interpretación asigna el valor V a esa letra. Para este caso la definición puede parecer trivial. La cláusula 2 se aplica a los restantes enunciados atómicos, cada uno de los cuales consistirá en un predicado n-ario seguido de *n* ocurrencias de constantes individuales. (Obviamente, ningún enunciado atómico puede contener una variable). Dicha cláusula establece que un enunciado atómico de esta forma será verdadero bajo una interpretación dada si los objetos denotados por las constantes individuales guardan entre sí la relación denotada por el predicado. La cláusula 3 añade que la negación de un enunciado es verdadera bajo una interpretación si y solamente si el enunciado no es verdadero (esto es, falso) bajo esa interpretación; la 4 establece que una disyunción de dos enunciados es verdadera si y solamente si uno o los dos disyuntos son verdaderos; la 5, que una conjunción es verdadera si y solamente si ambos conyuntos son verdaderos; la 6, que un condicional es verdadero si y solamente si el antecedente es falso o el consiguiente verdadero, o ambas cosas (es decir, a menos que el antecedente sea verdadero y el consiguiente falso, en cuyo caso el condicional es falso); y la 7, que un bicondicional es verdadero si y solamente si ambas partes tienen el mismo valor de verdad.

Es importante darse cuenta que puesto que todo enunciado exento de cuantificador es un enunciado atómico o es un compuesto molecular de enunciados más cortos, caerá bajo una de esas siete cláusulas. Si cae bajo las cláusulas l ó 2, su verdad, con relación a una interpretación dada, habrá de ser explícitamente referida, mientras que si cae bajo una de las cláusulas 3 a 7, su verdad, con relación a una interpretación dada, se reduce a la verdad o falsedad de enunciados más simples bajo tal interpretación. Estos enunciados más simples caerán, a su vez, bajo cualquiera de las cláusulas 1 a 7, de forma que, eventualmente, puesto que un enunciado no puede contener más que un número finito de ocurrencias de conectivas, la cuestión de la verdad o falsedad del enunciado original bajo una interpretación dada, quedará reducida a cuestiones relativas a la verdad o falsedad de enunciados atómicos bajo esa interpretación; y estas últimas cuestiones están explícitamente determinadas en las cláusulas 1 y 2.

Y baste ya de comentarios y explicaciones generales. Veamos ahora cómo se aplica la definición a ejemplos particulares. En orden a ello hemos de dar algunas interpretaciones de λ y considerar algunos enunciados. Sea, de acuerdo con esto, $\Im$ una interpretación que tenga por dominio al conjunto de todos los enteros positivos y asigne denotaciones a las constantes no lógicas de la manera que sigue:

E^1 : el conjunto de enteros positivos pares

O^1 : el conjunto de enteros positivos impares

P^1 : el conjunto de enteros positivos primos

L^2 : la relación binaria que se da entre enteros positivos m, n cuando $m < n$, es decir, la relación 'menor que'

I^2 : la relación binaria de identidad entre enteros positivos

S^3 : la relación ternaria que se da entre enteros positivos m, n, p cuando $m + n = p$

M^3 : la relación ternaria que se da entre enteros positivos m, n, p cuando $m \,.\, n = p$

a_1 : 1

a^2 : 2

a^3 : 3

P : V

Q : F

R : V

. .

. .

. .

(Obsérvese que con lo que antecede no se 'da', estrictamente hablando, una interpretación de λ, puesto que se dejan sin especificar las asignaciones o atribuciones correspondientes a la mayoría de las constantes no lógicas de λ. Puede comprobarse, sin embargo, según se verá más tarde, que la verdad o falsedad de los enunciados, bajo una interpretación dada, depende solamente de lo que esa interpretación asigne a las constantes que de hecho ocurran en los enunciados de que se trate)

Considérese ahora el enunciado

(1) La_1a_2 .

Este enunciado es atómico; al no tratarse de una letra enunciativa, procede aplicar la cláusula 2. Y aplicando esa cláusula, encontramos que 'La_1a_2' es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si los objetos que $\Im$ asigna a 'a_1' y a 'a_2' (esto es, los enteros positivos l y 2) guardan entre sí la relación que $\Im$ asigna a 'L' (esto es, la relación 'menor que'). En otras palabras, 'La_1a_2' es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si 1<2. Similarmente, '$La_2\, a_1$' es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si 2<1, y 'La_1a_1' es verdadero bajo Q si y solamente si 1<1.

Veamos ahora el enunciado

(2) La_1a_2 v $La_2\, a_1$.

Este enunciado es una disyunción; procede aplicar la cláusula 4. La cual nos enseña que 'La_1a_2 v $La_2\, a_1$' es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si 'La_1a_2' es verdadero bajo $\Im$ o '$La_2\, a_1$' es verdadero bajo $\Im$, o ambas cosas. Haciendo uso de las condiciones que acabamos de determinar para estos enunciados atómicos, tenemos: 'La_1a_2 v $La_2\, a_1$' es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si 1<2 ó 2<1 ó ambas cosas.

Del mismo modo, si se aplican las cláusulas 6, 3 y 2 se hallará que

(3) $$La_1a_2 \rightarrow La_2\, a_1$$

es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si no es 1<2 o no es 2<1. (Suponiendo que 'si..., entonces' sea entendido en el sentido denominado 'material', cabe establecer esta misma condición como 'si 1<2, entonces 2<1').

Y en lo que respecta al enunciado

(4) $$(Sa_2a_2a_5\ \&\ Sa_2a_2a_4) \rightarrow Ia_4a_5,$$

aplicando las cláusulas 6, *5* y 2, tenemos: (4) es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si,

si 2 + 2 = 5 y 2 + 2 = 4, entonces 4 = 5.

Tiempo es ya de volver a la tarea básica de la presente sección, que es definir 'verdadero bajo $\Im$' para todos los enunciados de λ, incluyendo aquellos que contienen cuantificadores. Para tratar aquí de los cuantificadores se necesita de una noción auxiliar, a la que se define como sigue:

Sean $\Im$ e $\Im$' interpretaciones de λ, y sea β una constante individual; entonces $\Im$ es una *variante en* β de $\Im$' si y solamente si $\Im$ e $\Im$' son idénticas o difieren sólo en lo que asignan a β.(Adviértase que esto implica que si $\Im$ es una variante en β de $\Im$', entonces $\Im$ e $\Im$' tienen el mismo dominio.)

Ahora puede ser formulada la definición de la locución *verdadero bajo* $\Im$. Al igual que en nuestra anterior tentativa, restringida a los casos de enunciados no cuantificados, esta definición procede también recursivamente: establece de modo explícito las condiciones bajo las cuales son verdaderos los enunciados más simples, y luego indica cómo los valores de verdad de enunciados complejos dependen de los de enunciados más simples (que esta vez no son necesariamente sus partes). Sea, de acuerdo con esto, ϕ cualquier enunciado de λ, α una variable y β la primera [1] constante individual que no ocurre en ϕ. Entonces

1) si ϕ es una letra enunciativa, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si $\Im$ asigna V a ϕ; y

2) Si ϕ es atómico y no es una letra enunciativa, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si los objetos que $\Im$ asigna a las constantes individuales de ϕ (tomándolos en el orden en que sus correspondientes constantes ocurren en ϕ) guardan entre sí la relación que $\Im$ asigna al predicado de ϕ; y

3) si $\phi = -\psi$, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si ψ no es verdadero bajo $\Im$; y

4) si $\phi = (\psi \vee \chi)$ para enunciados ψ, χ, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si ψ es verdadero bajo $\Im$ o χ es verdadero bajo $\Im$ o ambas cosas; y

5) si $\phi = (\psi \& \chi)$ para enunciados ψ, χ , entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si ψ es verdadero bajo $\Im$ y χ es verdadero bajo $\Im$; y

6) si $\phi = (\psi \rightarrow \chi)$ para enunciados ψ, χ, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si o ψ no es verdadero bajo $\Im$, o χ es verdadero bajo $\Im$, o ambas cosas; y

7) si $\phi = (\psi \leftrightarrow \chi)$ para enunciados ψ, χ, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si o ψ y χ son ambos verdaderos o ambos no verdaderos bajo $\Im$; y

8) si $\phi = (\alpha)\psi$, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si $\psi\, \alpha/\beta$ es verdadero bajo toda variante en β de $\Im$; y

9) si $\phi = (\exists\alpha)\psi$, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si $\psi\, \alpha/\beta$ es verdadero, cuando menos, bajo una variante en β de $\Im$.

Por otra parte, ϕ es *falso bajo* $\Im$ si y solamente si ϕ no es verdadero bajo $\Im$.

(En lugar de decir que ϕ es verdadero bajo $\Im$ o que ϕ es falso bajo $\Im$, diremos a veces que $\Im$ *asigna el valor de verdad V a* ϕ o que $\Im$ *asigna el valor de verdad F a* ϕ. Otros modos distintos de indicar que ϕ es verdadero bajo $\Im$ consisten en decir que $\Im$ *es un modelo de* ϕ o que $\Im$ *satisface a* ϕ . Esta terminología es asimismo extensiva a conjuntos de enunciados Γ ; así por ejemplo, decir que $\Im$ satisface a Γ es decir que todo enunciado en Γ es verdadero bajo $\Im$.)

Pasamos ahora, como hicimos antes, a comentar la definición y aducir ejemplos ilustrativos de ella. La única diferencia entre la definición que acaba de darse y la más restringida anteriormente considerada, está en la adición de las cláusulas 8 y 9, que se aplican a enunciados que son generales. Cualquier enunciado de esa índole constará de un cuantificador (α) o $(\exists\alpha)$, seguido de una fórmula ψ en la cual no ocurre otra variable libre que α. (Si ocurriese en la fórmula ψ alguna variable libre distinta de α, entonces ni $(\alpha)\psi$ ni $(\exists\alpha)\psi$ sería un enunciado, puesto que, con la sola excepción de α, cualquier variable libre en ψ seguiría siendo libre después de que se hubiesen antepuesto a dicha fórmula los prefijos (α) o $(\exists\alpha)$). Así, pues, si reemplazamos a lo largo de ψ todas las ocurrencias libres de α por ocurrencias de alguna constante individual β – y, a efectos de precisión, consideramos que β es la primera constante individual que no ocurra ya en ψ –, el resultado será un enunciado ψ' (esto es, $\psi\, \alpha/\beta$). Ahora bien el enunciado ψ', en contraste con la fórmula ψ tendrá un valor de verdad bajo cualquier interpretación que se elija. Por otra parte, si, como es natural, tomamos el número de ocurrencias de conectivas y cuantificadores como una medida de la complejidad de una fórmula, ψ' es más simple que $(\alpha)\psi$ y $(\exists\alpha)\psi$. De esta suerte, algo se gana al reducir las cuestiones sobre la verdad o falsedad de $(\alpha)\psi$ y $(\exists\ \alpha)\psi$ a cuestiones sobre la verdad o falsedad de ψ'. Esto es justamente lo que hacen las cláusulas 8 y 9. De acuerdo con 8, $(\alpha)\psi$ es verdadero bajo una interpretación $\Im$ justamente en el caso en que ψ' sea verdadero no sólo bajo $\Im$ sino también bajo todas las demás variantes en β de $\Im$; análogamente, la cláusula 9 dice que $(\exists\alpha)\psi$ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si ψ' es verdadero bajo $\Im$ o bajo alguna otra variante en β de $\Im$.

Veamos cómo operan estas cláusulas cuando se aplican a casos concretos. Sea $\Im$ la interpretación que ofrecimos al ocuparnos de la definición restringida, y consideremos el enunciado

(5) $(\exists y)\ La_2 y$.

Por la cláusula 9 nos aseguramos de que (5) es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si 'La_2 a' (que es el resultado de reemplazar todas las ocurrencias libres de 'y' en '$La_2 y$' por ocurrencias de la primer constante individual que no ocurra en '$La_2 y$', verbigracia, 'a') es verdadero bajo alguna variante en 'a' de $\Im$. Ahora bien, las variantes en 'a' de $\Im$ son, de acuerdo con la definición, la propia interpretación $\Im$ juntamente con todas aquellas que difieren de $\Im$ solamente en lo que asignan a la constante individual 'a'. Así, una variante en 'a' de $\Im$ será justamente igual a $\Im$ excepto en asignar el número entero 2 a 'a' (como también, por supuesto, a 'a_2'); otra será asimismo igual a $\Im$ excepto en asignar el número 3 a 'a'; y así sucesivamente. Cualquiera que sea el entero n que se elija, habrá alguna variante en 'a' de $\Im$ que asigne ese entero a 'a'. y, además, '$La_2 a$' será verdadero bajo esa variante en 'a' si y solamente si $2<n$. Supóngase, pues, que $\Im_2$ es la variante en 'a' de $\Im$ que asigna el número 2 a 'a'. Entonces '$La_2 a$' será verdadero bajo $\Im_2$ si y solamente si $2<2$. Sea $\Im_6$ la variante en 'a' de $\Im$ que asigna 6 a 'a'. Entonces '$La_2 a$' será verdadero bajo $\Im$ si y solamente si $2<6$. En general, para cualquier entero positivo n, si $\Im_n$ es la variante en 'a' de $\Im$ que asigna n a 'a', entonces '$La_2 a$' es verdadero bajo $\Im_n$ si y solamente si $2 < n$.

Vemos, pues, por lo antedicho, que '$La_2 a$' es verdadero bajo alguna variante en 'a' de $\Im$ si y solamente si hay algún entero positivo n tal que $2 < n$; en otras palabras, (5) es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si hay un entero positivo n tal que $2< n$. Ello está, sin duda, de acuerdo con nuestro conato de intelección del cuantificador existencial.

En relación con la cláusula 8 considérese

(6) $(x)(\exists y)\mathrm{L}xy$.

Este enunciado es de la forma $(\alpha)\psi$, donde α = 'x' y ψ = '$(\exists y)Lxy$'; procede aplicar, por tanto, la cláusula 8. Por ella sabemos que (6) es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si '$(\exists y)Lay$' es verdadero bajo toda variante en 'a' de $\Im$. Por consideraciones análogas a las presentadas en el caso de (5), es fácil establecer que '$(\exists y)Lay$' es verdadero bajo la variante en 'a' $\Im_m$ de $\Im$, justamente en el caso de que el entero m sea menor que algún entero. Por consiguiente, ‘$(\exists y)Lay$’ será verdadero bajo *todas* las variantes en ‘a’ de $\Im$ si y solamente si, para *todo* entero m hay un entero n tal que $m < n$. Tenemos, en consecuencia, el resultado, de nuevo en armonía con nuestras intenciones anteriores, de que (6) es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si, para todo entero positivo m, hay un entero positivo n tal que $m < n$.

Esperamos, naturalmente, que la anterior discusión ayude al estudiante a comprender nuestra definición de ‘verdadero bajo $\Im$’. Asimismo esperamos, e incluso creemos, que, sin demasiado esfuerzo por su parte, logrará ‘captar la idea’ de la definición y que entonces no tendrá ya necesidad de volver a aplicarla de la prolija manera que acabamos de ilustrar. Por lo demás, cuando los enunciados son complejos, aplicar paso por paso la definición resulta ser una tarea para cuyo cometido la vida es demasiado corta.

En realidad, esta definición encuentra su principal justificación en servir de punto exacto de referencia sobre cuya base se pueden establecer ciertos principios generales y fundamentales de frecuente aplicación; entre estos principios se cuentan los siguientes (por el momento, preferimos restringirnos a los enunciados y escribir de modo abreviado ‘verdadero’ por ‘verdadero bajo $\Im$’, y ‘falso’ por ‘falso bajo $\Im$’) :

1) Una negación es verdadera si y solamente si lo que niega es falso.

2) Una disyunción es verdadera si y solamente si al menos uno de los disyuntos es verdadero.

3) Una conjunción es verdadera si y solamente si ambos conyuntos son verdad.

4) Un condicional es verdadero si y solamente si o el antecedente es falso o el consiguiente verdadero, o ambas cosas.

5) Un bicondicional es verdadero si y solamente si ambas partes tienen el mismo valor de verdad.

6) Si una generalización universal $(\alpha)\phi$ es verdadera, entonces, para toda constante β, $\phi\ \alpha/\beta$ es verdadera. (La conversa de esta regla no es admisible.)

7) Si, para alguna constante β, $\phi\ \alpha/\beta$ es verdadera, entonces $(\exists\alpha)\phi$ es verdadera. (De nuevo, la conversa de esta regla tampoco es admisible.)

Tal vez sea digno de mencionar, dicho sea de paso, que hay un modo de definir la verdad de enunciados generales sin entrar en complejidades de tal calibre como las asociadas con la noción de variante en β. La idea sería definir

$(x)Fx$,

por ejemplo, como verdadero si y solamente si todos los enunciados

$Fa, Fb, ..., Ft, Fa_1, Fb_1, ... , Ft_1, Fa_2, ..., ...$

son verdaderos. Acaso una breve consideración de esta alternativa arroje más luz sobre el método que hemos utilizado.

Nótese en primer lugar que, desde un punto de vista intuitivo, esta nueva aproximación es plausible sólo en el supuesto de que cada objeto del universo de discurso esté nombrado por, al menos, una de las constantes en la lista

$a, b, ..., t, a_1, b_1, ..., t_1, a_2, b_2, ..., t_2, a_3, ...$

De otro modo podría suceder que todos los 'enunciados *F*' mencionados antes fuesen verdaderos, a pesar de que, no obstante, algún objeto del dominio no perteneciese al conjunto asociado con '*F*', en cuyo caso no estaríamos dispuestos a decir que

(x)Fx

sea verdadero. Teniendo esto presente, separemos de entre la totalidad de interpretaciones, aquellas interpretaciones $\Im$ que sean tales que, para cada elemento del dominio de $\Im$, haya una constante individual a la que $\Im$ asigna como denotación ese elemento (en otras palabras, merced a $\Im$ se le asigna un nombre a todo elemento del dominio de $\Im$); y démosles el nombre de '*interpretaciones completas*'. Entonces las cláusulas 8 y 9, en la definición de 'verdadero bajo $\Im$', pueden ser reemplazadas por

8') si $\phi = (\alpha)\psi$, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si todo enunciado $\psi\, \alpha/\beta$, donde β es una constante individual, es verdadero bajo $\Im$; y

9') si $\phi = (\exists\alpha)\psi$, entonces ϕ es verdadero bajo $\Im$ si y solamente si algún enunciado $\psi\, \alpha/\beta$, donde β es una constante individual, es verdadero bajo $\Im$.

Puede mostrarse que para cualquier enunciado ϕ, ϕ es verdadero bajo todas las interpretaciones completas (con la definición de 'verdadero' enmendada tal como se acaba de hacer más arriba) si y solamente si ϕ es verdadero bajo todas las interpretaciones (con nuestra definición 'oficial' de 'verdadero'). Sin embargo, dado que, en la aplicación de λ, no deseamos restringirnos a dominios respecto de los cuales haya en λ un número de constantes individuales suficiente para recorrerlos, continuaremos adheridos a una definición que no presupone que todo elemento del universo de discurso tenga un nombre. Podemos proponernos, por ejemplo, formular en λ la teoría de números reales, a pesar de que se conoce, por una famosa prueba de Cantor, que no existe manera de poner en correspondencia 1-1 al conjunto de los números reales con el conjunto de constantes individuales de λ.

***

Ejercicios del capítulo 3*:*

l . Utilizando literalmente la definición de 'fórmula' (esto es, no haciendo uso de las convenciones acerca de la eliminación de paréntesis, superescritos y suscritos) establézcase en cada uno de los siguientes casos : (a) si la expresión dada es una fórmula, (b) si es un enunciado, (c) si es un enunciado atómico, un enunciado general, un enunciado molecular, o ninguna de estas cosas, (d) si *'x'* ocurre libre en ella, (e) si *'x'* ocurre ligada. Dispónganse las respuestas en forma de tabla.

(1) F^1x

(2) $(x)\,F^1x$

(3) F^1a

(4) $(x)\,F^1a$

(5) $-(x)\,F^1x \vee F^1a$

(6) $((x)\,F_1^1x \rightarrow F_1^1a)$

(7) $(x)(y)(F^1xy \rightarrow F^1yx)$

(8) $((\exists x)(y)\,G_1^2xy \rightarrow (y)(\exists x)G_1^2xy\,)$

(9) $((x)\,F^1x\ \vee - F^1x)$

(10) $(x)(F_1{}^1x\ \vee - F_1{}^1x)$

(11) $(F^1a \rightarrow (-F^1a \rightarrow F^1a))$

(12) $(P \rightarrow (x)P)$

(13) $(((F^1a \leftrightarrow F^1x) \leftrightarrow F^1a) \leftrightarrow F^1x)$

(14) $(-F^1a)\ \&\ (-F^1b)$

2. Tomando α en lugar de *'x'* y β en lugar de *'b',* escríbase $\phi\,\alpha/\beta$, donde ϕ es la anterior fórmula (1). Hágase lo mismo para $\phi = (6), \phi = (9), \phi = (12), \phi = (13)$.

3. Dar un ejemplo de:

(a) una fórmula en la que '*x*' e *'y'* ocurran libres;

(b) un enunciado que comience con un cuantificador universal;

(c) un enunciado que sea una conjunción, cuyas conyuntos sean disyunciones que tengan a su vez por disyuntos, letras enunciativas o negaciones de letras enunciativas;

(d) una fórmula en la que no ocurra símbolo individual alguno;

(e) una fórmula que sea una generalización universal de una generalización existencial de un condicional;

(f) una fórmula que no sea un enunciado, pero que tenga partes que sean enunciados;

(g) una fórmula que sea un enunciado, pero que no tenga partes que sean enunciados.

4. Insértense comillas para que resulte verdadero lo siguiente:

> Aun cuando α no es una variable de λ y β no es un símbolo individual de λ, hay al menos un α, un β y un ϕ tales que α es una variable de λ, β es una constante individual de λ, ϕ es una fórmula de λ, y $\phi\ \alpha/\beta$ es lo mismo que ϕ.

5. Para cada una de las condiciones siguientes, dar un par de fórmulas distintas (esto es, no idénticas) ϕ y ψ que la satisfagan.

(a) ϕ es el resultado de reemplazar todas las ocurrencias libres de *'x'* en ψ por ocurrencias de '*a*', y ψ es el resultado de reemplazar todas las ocurrencias de '*a*' en ϕ por ocurrencias de *'x'*.

(b) ϕ es el resultado de reemplazar todas las ocurrencias libres de 'x' en ψ por ocurrencias de *'a'*, pero ψ no es el resultado de reemplazar todas las ocurrencias de '*a*' en ϕ por ocurrencias de *'x'*.

(c) ϕ es en todo semejante a ψ excepto en que ϕ contiene ocurrencias libres de *'y'* donde, pero no solamente donde, ψ contiene ocurrencias libres de *'x'*.

6. Muéstrese que las dos condiciones siguientes son equivalentes para todas las fórmulas ϕ, ψ.

(a) ϕ es en todo semejante a ψ excepto en contener ocurrencias libres de *'y'* donde, y solamente donde, ψ contiene ocurrencias libres de *'x'*.

(b) ϕ es en todo semejante a ψ excepto en contener ocurrencias libres de *'y'* dondequiera que ψ contenga ocurrencias libres de *'x'* y no contenga ocurrencias libres de *'y'*.

**

Ejercicios del capítulo 4:

7. dése una interpretación bajo la cual ‘$F^{1} a$’ sea verdadero;

dése una interpretación bajo la cual ‘$F^{1} a$’ sea falso;

dése una interpretación bajo la cual ‘$((x)\, F^{1}_{1} x \rightarrow F^{1}_{1} a)$’ sea verdadero;

dése una interpretación bajo la cual ‘$(x)(\, F^{1}_{1} x \ \mathrm{v} - F^{1}_{1} x)$’ sea verdadero.

8. Explíquese por qué no puede darse una interpretación bajo la cual ‘$((x)\, F^{1}_{1} x \rightarrow F^{1}_{1} a)$’ sea falso. Hágase lo mismo con ‘(10) $(x)(\, F^{1}_{1} x \ \mathrm{v} - F^{1}_{1} x)$’.

9. En cada uno de los casos siguientes, dése una interpretación bajo la cual el último enunciado de la serie sea falso y los restantes verdaderos (mostrando así que el último enunciado de turno no es una consecuencia de los que le anteceden).

(a)
$Ga \rightarrow Fa$
$- Ga$
$- Fa$

(b)
$(x)(Hx \rightarrow \mathrm{Gx})$
$(x)(Fx \rightarrow Gx)$
$(\exists x)\ (Fx\ \&\ Hx)$

(c)
$(\exists x)Fx$
$(\exists x)Gx$
$(\exists x)(Fx\ \&\ Gx)$

(d)
$(x)(\ \exists y)Fxy$
$(\exists y)(x)\ Fxy$

(e)
$(x)(Fx \ \mathrm{v}\ Gx)$
$(x)Fx \ \mathrm{v}\ (x)\ Gx$

(f)
$Ga \rightarrow Fa$
Fa

Ga

(g)
(x)Fx $\rightarrow$*Ga*
(*x*)(*Fx*$\rightarrow$ *Ga)*

(h)
(*P* $\rightarrow$(*Q* $\rightarrow$ *R*))
(*P* $\rightarrow$ (*R*$\rightarrow$*Q*))

11. ¿Cuántos elementos ha de haber en el dominio de toda interpretación bajo la cual sea verdadero el siguiente enunciado?

Fa & – Fb.

12. Explíquese por qué no puede darse una interpretación bajo la cual sea falso el siguiente enunciado

(P $\rightarrow$ Q) v (Q $\rightarrow$ R).

____

NOTAS

1. Suponemos que las constantes individuales están enumeradas por el siguiente orden: *a*, *b*, ..., *t*, a_1, b_2 , ... t_1 , a_2 , b_2 , ...

* Compendio de *Lógica matemática elemental*, Tecnos, Madrid, 1987, Cap. III., *El lenguaje formalizado λ*, y Cap. IV, *Interpretaciones y validez universal*.

del hablar